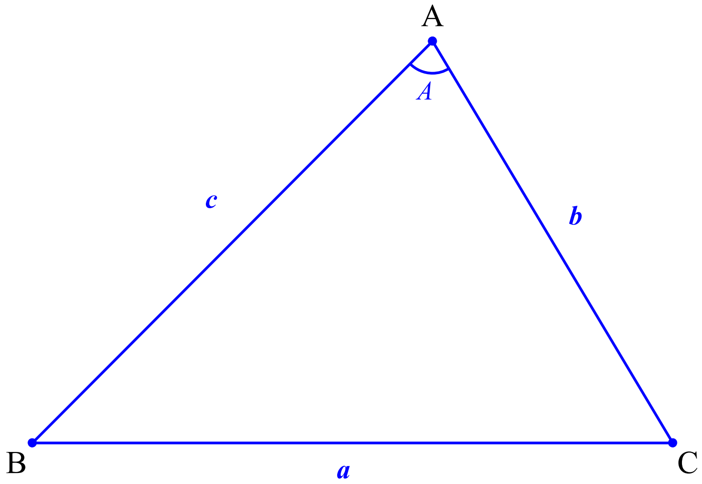
ヘロンの公式の導き方

ヘロンの公式

$s=\dfrac{a+b+c}{2}$，三角形 ABC の面積を S とすると，$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$



ヘロンの公式の導き方

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ を，余弦定理を用いて，辺の長さだけの式に変形すればよい。

$$
\begin{aligned}
\sin^2 A &= 1-\cos^2 A \\
&= 1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 \\
&= \left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) \\
&= \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}\cdot\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} \\
&= \frac{\{a^2-(b-c)^2\}\{-a^2+(b+c)^2\}}{4b^2c^2} \\
&= \frac{\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}\{-a+(b+c)\}\{a+(b+c)\}}{4b^2c^2} \\
&= \frac{(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)}{4b^2c^2} \\
&= \frac{(a+b+c)(-a+b-c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}
\end{aligned}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}bc\sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b-c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b-c)(a-b+c)(a+b-c)}{16}} \\
&= \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b-c)(a-b+c)(a+b-c)}{2^4}} \\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)} \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \left(s=\frac{a+b+c}{2}\right)
\end{aligned}
$$